

Serie 13

1. Gegeben seien die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und die durch sie vermittelte Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

- (a) Bestimmen Sie $\text{rg}(\mathbf{A})$.
- (b) Beschreiben Sie den Unterraum $\ker(\varphi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$. Welche Dimension hat dieser Unterraum?
- (c) Ist φ bijektiv?
- (d) Lösen Sie

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{array} \text{ und } \begin{array}{l} 2x + 3y + 3z = 7 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{array}.$$

3. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} x + 4y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + \lambda z = 4 \end{array}$$

- (a) genau eine Lösung
- (b) keine Lösung
- (c) mehrere Lösungen?

Geben Sie die Lösungen in Abhängigkeit von λ an.