

Serie 23

1. Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}.$$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (f) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

3. Der Umfang eines regelmäßigen n -Ecks, das einem Kreis vom Radius R einbeschrieben ist, beträgt $U_n = 2 \cdot R \cdot n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$. Man bestimme $u = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

4. Es gilt der Satz:

Für n stetige Funktionen $f_1 \dots f_n$ in \mathbb{X} sind auch die Funktionen

$$F_{\min}(x) = \min_{1 \leq k \leq n} f_k(x) \text{ und}$$

$$F_{\max}(x) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(x) \text{ stetige Funktionen.}$$

Man zeige, dass die Funktion

$$g_c(x) = \begin{cases} -c & \text{für } f(x) \leq -c \\ f(x) & \text{für } -c \leq f(x) \leq c \\ c & \text{sonst} \end{cases}$$

für jede stetige Funktion in \mathbb{R} ebenfalls stetig in \mathbb{R} ist.